Leçon 228 : Continuité, dérivabilité, dérivation faible de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et app^{ns}.

Dantzer
Gourdon
Hirsch-Lacombe

I - Continuité

1. Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 Une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en $a \in \mathring{D}$ si elle vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Définition 1.2 Une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Exemples 1.3
- la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est discontinue en 0
- la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.4 (caractérisation séquentielle) La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset D$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Définition 1.5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, le prolongement par continuité de la fonction f en a est la fonction $g : x \in I \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases}$ continue sur I.

Exemple 1.6
la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x} \sin x$ se prolonge par continuité en 0 avec pour valeur 1

Théorème 1.7 (continuité sous le signe intégrale) Soit $f : I \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Supposons d'autre part que :

(i) $\forall t \in I$, $f(t, \cdot)$ soit mesurable

(ii) pour presque tout $x \in E$, $f(\cdot, x)$ soit continue sur I

(iii) $\forall t \in I$, ppt $x \in E$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ où $g : E \longrightarrow \mathbb{R} \in L^1(\mu)$

Alors la fonction $t \in I \longmapsto \int_E f(t,x)\, d\mu(x)$ est continue.

Définition 1.8 Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite uniformément continue si elle vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in D, (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Exemples 1.9
- sin est uniformément continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Proposition 1.10 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I, alors f est continue sur I.

2. Comportement en fonction de l'espace de départ

Théorème 1.11 (des valeurs intermédiaires) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Contre-exemple 1.12
la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ vérifie le TVI mais n'est pas continue

Théorème 1.13 (Heine) Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Théorème 1.14 Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Contre-exemple 1.15
$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Théorème 1.16 (Weierstrass) Toute fonction continue sur un compact est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Lemme 1.17

II - Dérivabilité

1. Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est dérivable en $a \in I$ si $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe. Lorsqu'elle existe, cette limite est notée $f'(a)$.

Proposition 2.2 Une fonction dérivable en a est continue en a.

Exemples 2.3

- la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\sin' = \cos$
- la fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$

Proposition 2.4 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :

(i) si f et g sont dérivables en $a \in I \cap J$ alors $f+g$ et fg sont dérivables en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(ii) sous les hypothèses précédentes, si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

(iii) si $g(J) \subset I$, g dérivable en $a \in J$ et f dérivable en $g(a)$ alors $f \circ g$ est dérivable en a et $(f \circ g)'(a) = g'(a) . f' \circ g(a)$

Proposition 2.6 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathring{I}$ alors $f'(a) = 0$.

Théorème 2.7 (Darboux) Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

2. Théorème de Rolle et ses conséquences

Théorème 2.8 (Rolle) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 2.9 (des accroissements finis) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Corollaire 2.10 Une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur $]a,b[$.

Théorème 2.11 (formule de Taylor - Lagrange) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n, dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[,\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Application 2.12 (Méthode de Newton)

Définition 2.13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^n si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue sur I.

Lorsque f est de classe C^n pour tout n, on dit que f est C^∞.

Contre-exemple 2.14

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^1

Théorème 2.15 (fondamental de l'analyse) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'application $F : t \in I \longmapsto \int_a^t f(x)\,dx$, avec $a \in I$, est de classe C^1 et $f = F'$.

III - Théorie des distributions [Hir]

1. Définitions

Définition 3.1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle distribution sur Ω toute forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ telle que : pour tout compact K de Ω, il existe $m \in \mathbb{N}$, $c \geqslant 0$ vérifiant pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{Supp} \varphi \subset K$, que $|T(\varphi)| \leqslant c \|\varphi^{(m)}\|_\infty$

Notation 3.2 On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions, et pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on note $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$.

Proposition 3.3 Soit $L^1_{loc}(\Omega)$ l'espace des fonctions localement intégrables. Alors pour tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\langle [f], \varphi \rangle := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, définit une distribution.

Exemples 3.4

- valeur principale $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
- fonction de Heaviside $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, $\langle [H], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x)\,dx$
- mesure de Dirac $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$
- partie finie de $\frac{1}{x^2}$: $\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

2. Dérivation faible

Définition 3.5 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle$.

Proposition 3.6 Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De plus, pour tout $f \in L^1_{loc}$, $[f'] = [f]'$.

Définition 3.7 On définit plus généralement l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre p par : $\langle T^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle T, \varphi^{(p)} \rangle$ avec $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Exemples 3.8

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\langle \delta_a^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle \delta_a, \varphi^{(p)} \rangle = (-1)^p \varphi^{(p)}(a)$
- $H' = \delta_0$
- $[\log|x|]' = vp\,\frac{1}{x}$

Théorème 3.9 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifiant $T' = 0$, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $T = [c]$.

Théorème 3.10 (formule des sauts) Soit f une fonction sur Ω telle qu'il existe des points $x_1 < \dots < x_m$ de Ω tels que :

- $f \in C^1$ sur $\Omega \setminus \{x_i\}_{1 \leq i \leq m}$
- f' définie sur $\Omega \setminus \{x_i\}$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$

Alors : $[f]' = [f'] + \sum_{k=1}^{m} (f(x_k^+) - f(x_k^-))\,\delta_{x_k}$.